On the possibility of multisoliton solutions Nonlinear Klein-Gordon equation

EM wave in GS is described by a nonlinear Klein–Gordon equation first obtained in [11]. В литературе это уравнение получило название (also referred to as Kryuchkov–Kukhar equation (KKeq) [ ]).

В безразмерном виде уравнение распространения EM wave in GS имеет вид

(1)

Здесь

Отметим, что при b << 1 уравнение (2) переходит в известное уранение SG.

Кинковое решение уравнения (1) задается в неявном виде интегральным соотношением

(2)

где

Возникает естественный вопрос – является ли это решение солитонным? В частности (а именно?) – как изменяется форма сталкивающихся уединенных волн после их соударения? Известно, что бегущие солитоны и/или антисолитоны проходят сквозь друг друга как полностью проницаемые, и единственный наблюдаемый эффект — фазовый сдвиг. При этом сталкивающиеся солитоны сохраняют свою скорость и форму.

Исследуем численно столкновение двух кинков уравнения (1). Интересуемся решениями с .

Так как начальное условие в виде (2) задается неявно, то уже в начальной форме кинка могут быть вычислительные ошибки, обусловленные необходимостью решения интегрального уравнения. Эти ошибки будут накапливаться, влиять на качество решения и, поэтому, нам нужен какой-то критерий, позволяющий определить чем (и насколько) обусловлено изменение формы импульса – вычислительными погрешностями или природой уравнения. В качестве такого критерия возьмем коэффициент корреляции двух векторов и одинаковой длины *n*, определяемый как

(3)

Здесь стандартное отклонение от среднего для вектора .

В качестве векторов будем брать равномерно распределенные массивы значений безразмерной напряженности поля импульса между точками, взятыми на одинаковом расстоянии влево и вправо от вершины импульсов в начальный (вектор ) и какой-либо произвольный (вектор ) моменты времени.

Из определения (3) следует, что в случае полного совпадения векторов коэффициент . И чем больше один вектор отличается от другого, тем меньше будет .

Решение уравнения (1) проводилось с помощью среды «Wolfram Mathematica 10». Начальное условие интерполировалось многочленом второй степени из набора точек, полученных решением уравнения (2), с шагом по

Для оценки вычислительной ошибки, вносимой в начальном условии неявным заданием формы кинка, рассмотрим распространение одиночного кинка в уравнении, сильно отклоняющемся от уравнения sine-Gordon, т.е. *b* >> 1. Для примера *b* = 15, *v* = 0.5, начальная координата . На рисунке 1 показаны его положения в моменты времени 0 и 20.

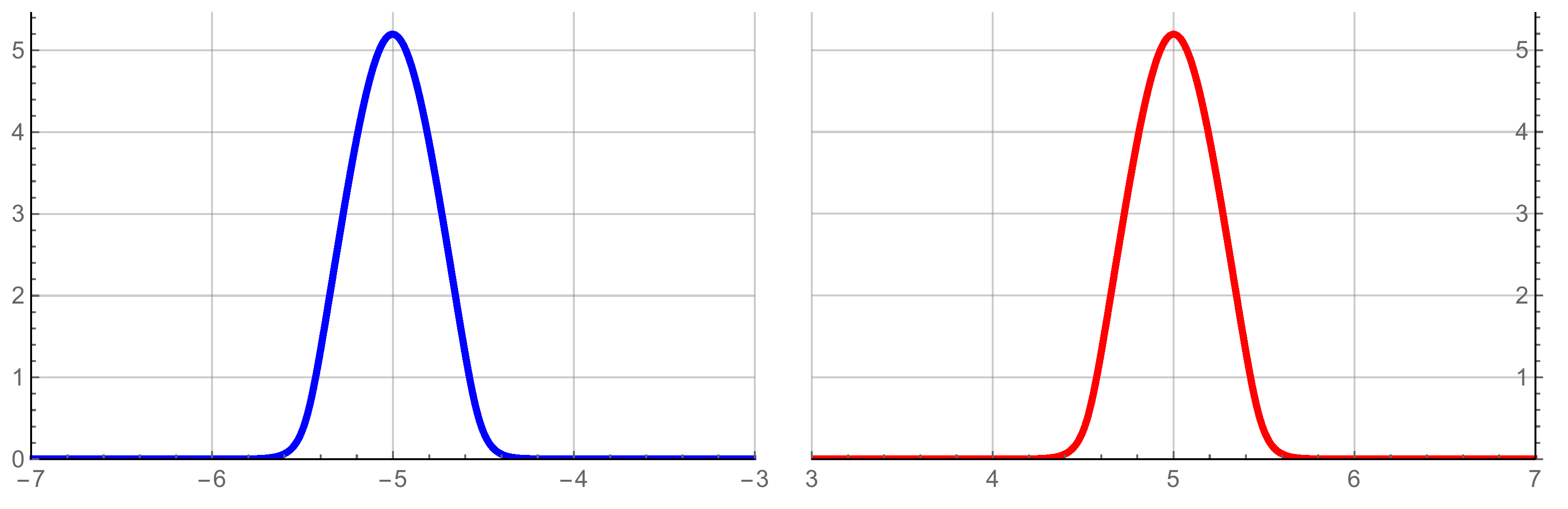


Рисунок 1

На рисунке 1 не видно никаких изменений формы импульса с течением времени. Но при увеличении (рисунок 2) становится заметно, что есть некоторый шум, который усиливается с течением времени.

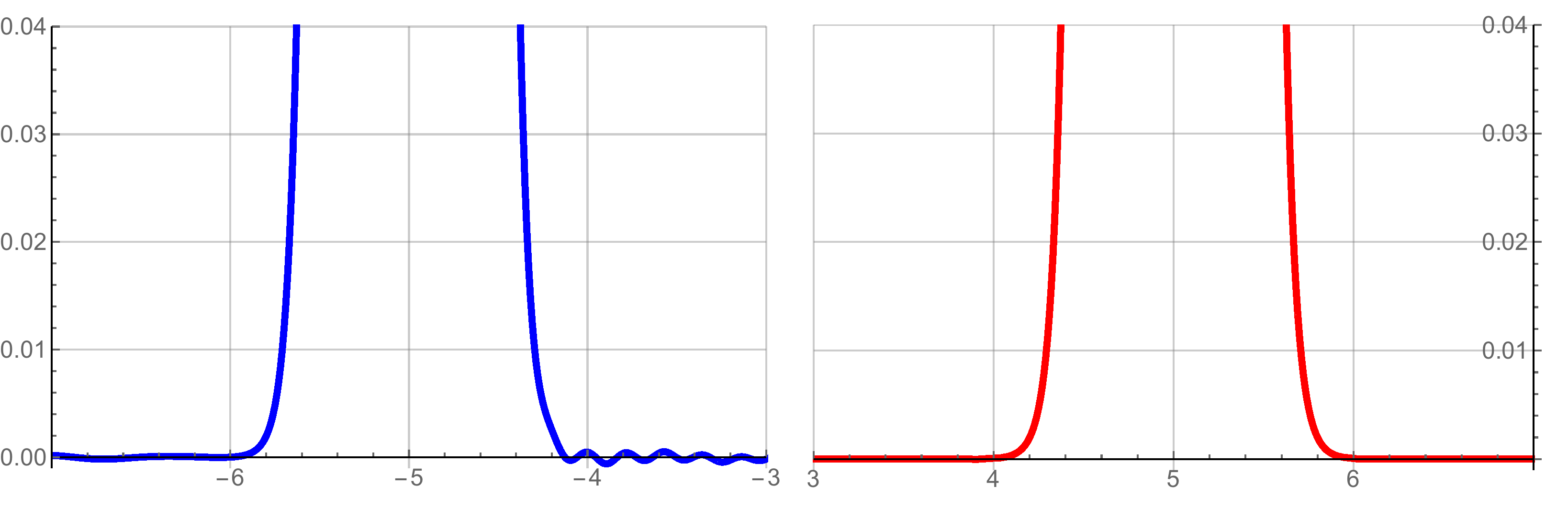


Рисунок 2

Этот шум является вычислительной ошибкой и приводит к изменению начальной формы импульса. Для оценки этого изменения найдем коэффициент корреляции (3) формы импульса в разные моменты времени (Рисунок 3).

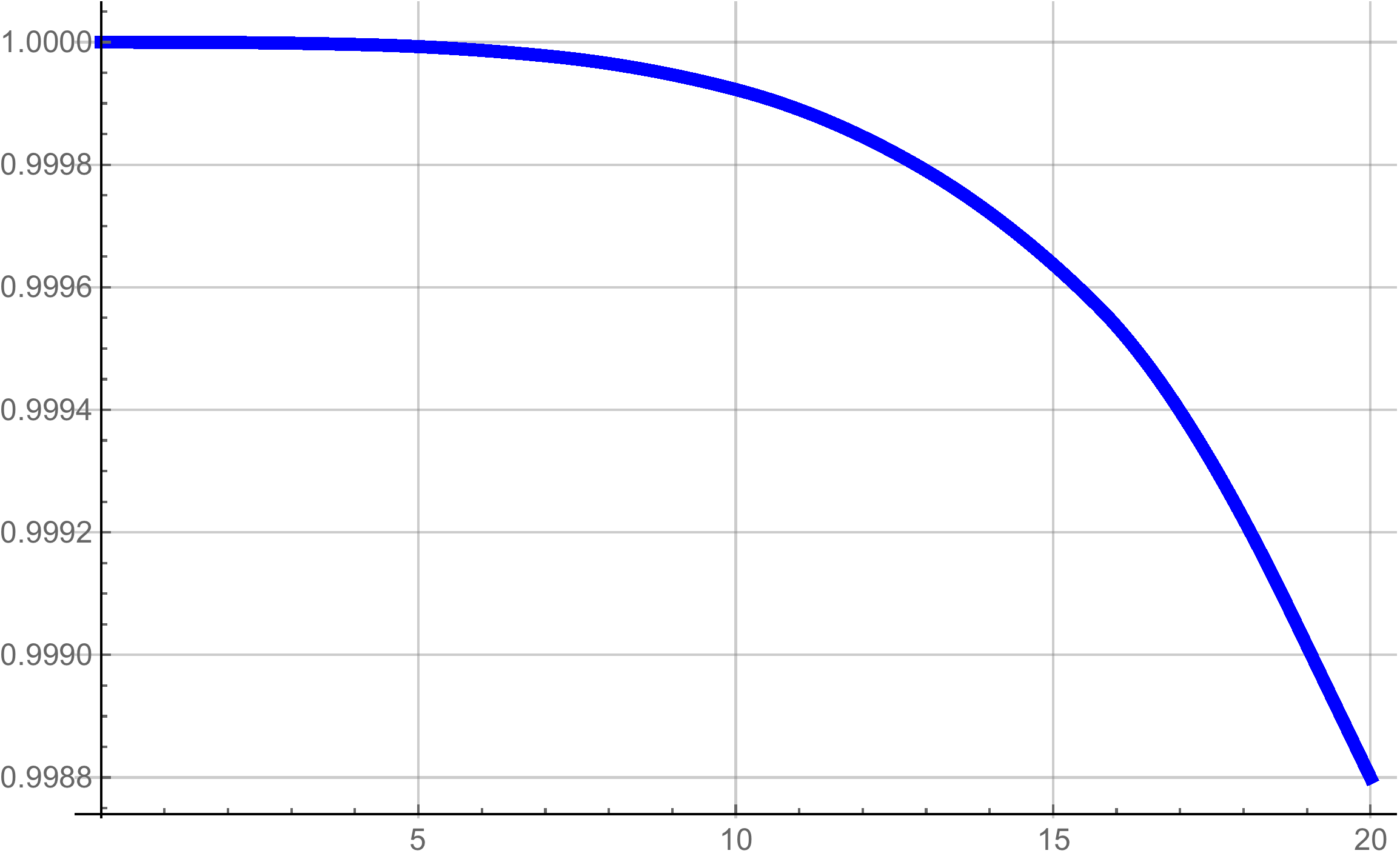


Рисунок 3

Видно, что на времени до 20 единиц изменения только в 4 знаке после запятой. Такой порядок изменений является отправной точкой при исследовании изменения формы импульсов при их столкновении.

Рассмотрим теперь столкновение импульсов. Характеристики уравнения и импульсов такие же, как и выше.

На рисунке 4 форма одного из сталкивающихся импульсов показана в моменты времени 0 и 20.

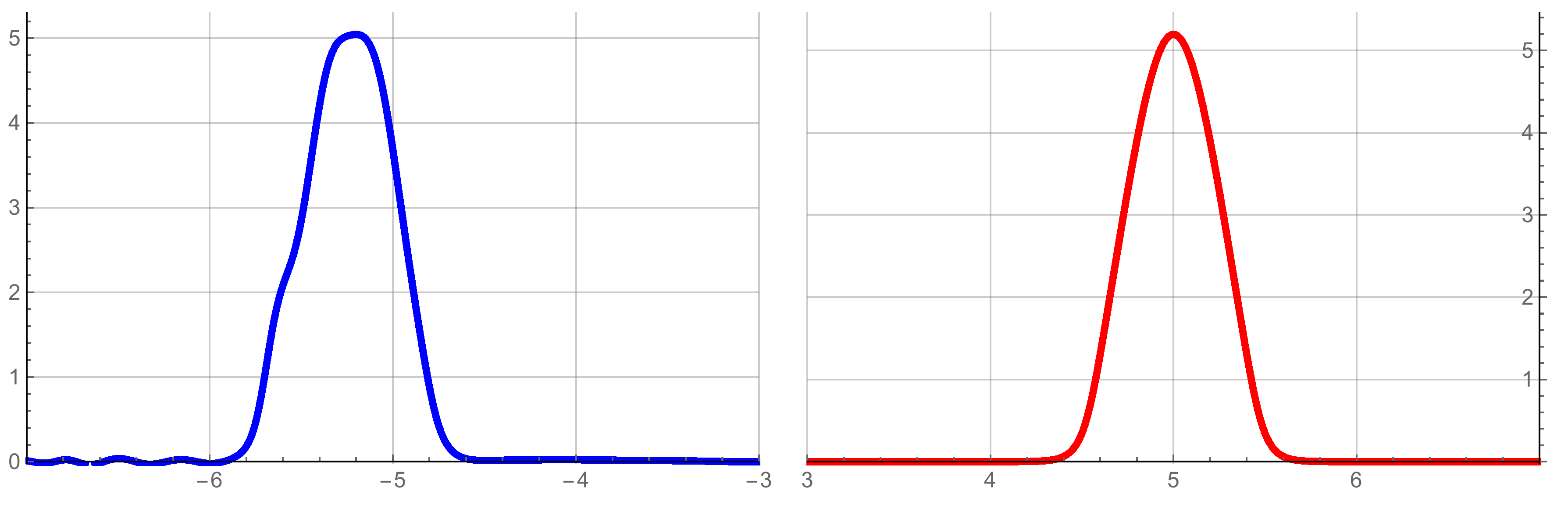


Рисунок 4

Здесь уже невооруженным взглядом заметно изменение формы импульса. Видно, что после столкновения амплитуда кинков стала заметно ниже, чем вначале. Приведем также укрупненный профиль импульсов на рисунке 5.

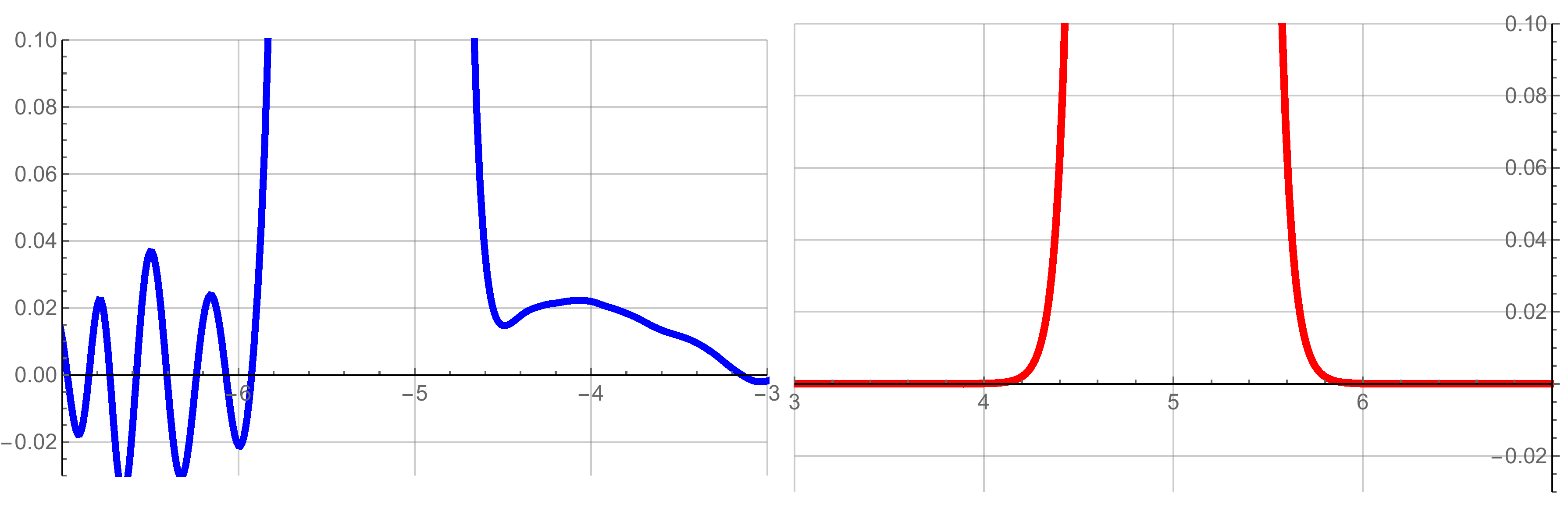


Рисунок 5

Видно, что амплитуда шума минимум на порядок превосходит амплитуду шума, обусловленную только вычислительными ошибками. То есть даже визуальный анализ приводит к выводу о том, что кинки уравнения (1) не являются солитонами. Этот вывод также подтверждает и расчет коррелятора по формуле (3) в начальный момент времени и далеко после столкновения.

Сравнение в случае столкновения кинков и (рисунок 3) в случае распространения одиночного импульса подтверждает вывод о том, что форма импульса в случае столкновения двух кинков меняется гораздо существенней, чем в случае распространения одиночного импульса.

Таким образом, на основании численного исследования процесса столкновения двух кинков уравнения (1) можно сделать вывод о том, что это уравнение, скорее всего, не имеет многосолитонных решений.